数理解析研究所講究録 1444 巻 2005 年 59-62

2004.8.25
京都大学数理解析研究所　研究集会

数学乗除往来のもたらしたもの

竹之内　脩　(Osamu Takenouchi)

1　關孝和と建部賢弘

建部賢弘は、「数学乗除往来」の問題に解答を与えているのであるが、この書の出版年が 1683 年である。版木作成などの時間を考えると、恐らくその前年、1682 年には、これらの問題の解答は、完成していたのであろう。この年代をもとに、關孝和、建部賢弘の研究の年代の推定ができる、と考える。

まず、建部が關の門に入ったのが 13 才のときというから、1677 年のことである。最初に渡されたのが「算学啓蒙」であっただろう。それを終えて、次に「発微算法」が渡された。このとき、作ったノートを後年、「算学啓蒙諺解大成」、「発微算法演段諺解」として出版したのだと考える。建部の研究の長いブランク、それは、将軍お側役としての多忙な日々によるものであったことを思うと、その間に、改めてこの書物を作ったと考えるのは、いささか見当をはずれたものではなかろうか。そこで、「算学啓蒙諺解大成」は 1678 年頃、「発微算法演段諺解」は 1680 年頃の作と想像する。

この頃大事件が起きた。佐治一平の「算法入門」における「発微算法」非難である。關一門は、これにいきり立ったに相違ない。刃傷沙汰になってもおかしくない程の事件と察する。關はそれに対して、佐治のこの書物は、「数学乗除往来」の遺題の解答を与えているが、碌なものではない。ちゃんとした解答を作って、見返してやれ、ということで、建部にその任を与えたのであろう。それに応じて作られたのが「研幾算法」である。この書の序文を見れば、彼の憤りがいかばかりであったかがわかる。

さて、「研幾算法」の中で、主役を演ずるのが、關の「解伏題之法」の手法である。この「解伏題之法」は、行列式のことばかりが注目されているが、真に重要なのは、二つの 2 変数の多項式から、一つの変数を消去する議論である。このことは、西洋数学では、18 世紀半ばから論じられるようになったもので、正に關の議論は、その先を行くものであった。

恐らくこの時期、すなわち 1680 年前後、關のスクールでは、この消去の手法に関して、盛んに議論がなされていたに相違ない。すでに、この手法の萌芽は、「発微算法」に見える。

また、それ以前に、天元術傍書法の開発がなされている。これは、書かれたものとしては「解見題之法」で、これには年代がはいっていないが、「解伏題之法」と同じ 1683 年と解釈されているようである。しかし、「解伏題之法」は重訂となっているので、それよりもっと早くに最初のものは書かれているわけである。私は、「解見題之法」は、1680 年頃、あるいはそれより以前に書かれたものと考える。

ところで「研幾算法」は、關の「発微算法」と同じスタイルをとっていて、問題の解答だけが書いてあって、どうやってそれを導いたのか、書かれていない。もちろん建部は、それに対してちゃんとしたノートを作っていたわけである。それを「発微算法演段諺解」を出版したついでに、出版したのが、「研幾算法演段諺解」、「研幾算法第４９問解術」と考える。この二著は、著者、出版年不詳ということなのであるけれども。

2　円周率術、環矩術、弧矢弦術

円周の長さの確定は、大きな問題であったのだろう。当時、一般には、3.16 が使われていて、これは、ジャイナ教から来たものだろうという。

この計算に先鞭をつけたのは、「算俎」であるが、關孝和は、これを継いで計算をした挙げ句、彼の独自の方式を打ち出した。これは、彼の没後出版された「括要算法第四巻巻貞」に、《求円周率術並環矩術》として述べられている。そして、彼は、その方式を、そのまま円弧の長さの計算に適用する。そこに得られた数は、きわめて正確な数値である。

そして、直径と矢から、多項式として、円弧の長さを与える式を導いた。これは、環矩術に続く《求弧矢弦率術》である。

建部は、研幾算法第一問の解において、直径と矢《から円弧の長さを与える式を、關とは違うデータをもとに作り出しているが、それは、關の方式を追従したものに相違ない。

3　正多角形

研幾算法第二問は、正五角形、正七角形、正九角形の一辺の長さと、外接円の半径、内接円の半径との関係式を求めている。しかし、それには何の説明もなく、ただ解答が与えられているのみである。

一方、關孝和「括要算法第三巻巻利」は、《角法演段従三角而至二十角》であって、正多角形の一辺の長さと、外接円の半径、内接円の半径との関係式を樹立する方法が与えられている。これは、諸外国の数学にも例を見ない研究で、まさに關の数学の偉大な成果の一つとして、世界に誇るべきものであろう。

建部は、この關の成果を援用したに過ぎないと考えられる。

4　五角形と外接円

研幾算法第三問は、五角形の五辺の長さを与えて、外接円の半径を求める問題である。ここでは、三角形の辺の長さと外接円の半径の関係を与える式が繰り返し用いられ、そして、その中で補助的に用いられたいろいろな線分の長さを消去する。ここに建部の力量が如何なく発揮されている。

しかし、ここで疑問なのが、何故五角形なのか、ということである。三角形でなく、四角形でなく、何故五角形なのか。実際、五角形の場合の解答を作るのには、三角形の場合を繰り返し適用しなければならない。まず、三角形の場合が解決されていなければならない。

当時、三角形の場合は、解決済みであったのであろうか。そして、四角形、五角形にと進むための消去法の議論が必要だったのであろうか。

三角形の場合を扱うには、正弦定理、余弦定理が必要である。余弦定理は、既に六斜術として、「発微算法」の中に現れ、また、「頭書算法闕疑抄」の中でも扱われている。正弦定理は、弧矢弦の定理の変形と考えられる。これは、建部の発明であろうか。

5　周径率

「数学乗除往来」には、円周率の近似分数 $\frac{355}{113}$ が現れている。これは、どこから来たものであろうか。

この分数は、5 世紀に中国の祖冲之 (429～500) が発見したものである。このことは、中国の歴史書「隋書」の中に見えている。祖冲之は、$3.1415926 < \pi < 3.1415927$ を見出し、さらに、約率 $\frac{22}{7}$、密率 $\frac{355}{113}$ を見出した。しかし、どのようにしてそれを導いたものかは、伝えられていない。面白いことに、その後の中国では、例えば朱世傑は、「四元玉鑑」の中で、$\frac{22}{7}$ を冲之密率として使っていて、$\frac{355}{113}$ は出てこない。

ヨーロッパでは、メティウス (1527～1607) が $\frac{355}{113}$ を見出した。

さて、これがどのようにして日本に伝えられたのであろうか。

「数学乗除往来」第四問に、『師丞子は、$\frac{355}{113}$ と云う』とあるので、誰かがこれを知っていたのであろう。關孝和も知っていたのかもしれない。一つの可能性としては、平山・中村・鈴木の唱える宣教師キアラ Chiara によるものであろう。

中国、隋書の記載によるものでないことは、後年、建部の書いた不休綴術に、20 数年経ってから、隋書にこのことが書かれているのを知り、

嗚呼、邦を異にし、時を異にすと雖も、真數に會するときは相同じ。可謂妙なりと。

と驚愕しているのを見ても、わかる。

さて、關の方法は、分数の値が、π よりも小さいときは、分母に 1、分子に 4 を加え、π よりも大きいときは、分母に 1、分子に 3 を加えることを繰り返して、この分数 $\frac{355}{113}$ を導いている。連分数

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

の部分分数によって得るのは、建部によるものである。

6　数学乗除往来の著者 池田昌意

池田昌意とは、どういう人物か。

数学乗除往来遺題一、二、三、四は、相当一般性をもった問題である。これが、一人の人間の脳中から生まれたとは考えにくい。当時、これらが算者一般に共通した問題意識なのであったのだろうか。それとも、池田を取り巻くあるグループがあって、その中で議論されていたものであろうか。

一つの考えは、第四問に、師丞子とあり、明治前では、これを隅田江雲のことか、としているので、隅田江雲の一門という解釈もできるであろう。ただし、隅田江雲とはどういう人なのか、わからない。隅田江雲もキアラの許に出入りしていたのかもしれない。

7　考察

ここで、關孝和の括要算法の中の諸事項についての、年代及び順番について、考察してみたい。

〔1〕 円周率

円周の長さを定めることは、相当初期から意識していたに相違ない。彼が、その増約の法を見出したのが、仮に 1660 頃としておこう。

〔2〕 弧矢弦率はいつのことだろう。ここには、多項式による近似が使われる。一つの解釈として、次のことをあげたい。それは、暦の研究と関係がある、ということである。

当時、使われていた暦は「宣明暦」といい、これは、唐の時代、822 年に徐昂が作ったとされるものである。それから、800 年余り、これがそのまま使われていて、日常とは、ずれが大きかった。中国では、改暦がされて、郭守敬らの作った「授時暦」が、元の時代 1281 年から使われていた。宣明暦では、計算を 1 次式でしていたが、授時暦では、多項式による計算を用いていた。この違いが、もう一つ、実情にあわないずれを導くものとして、多項式による計算を考察したのであろう。1680 年の頃に、「授時発明」、「授時暦経立成之法」などの研究がある。これに加えて、「数学乗除往来」で弧形の面積を求めることが問われたりして、円の弧の長さを求める方法として、矢と弦の長さの多項式として、円弧の長さを求めることを研究したものと考える。したがって、これは、1680 年頃の成果と見てよいであろう。

〔3〕 周径率 これは、いつの頃だろうか。關が分数 $\frac{355}{113}$ のことを知っていたとすれば、これを導く方法をいろいろ模索していたであろうことは、想像に難くない。円周の長さを確定したそのすぐ後にこの研究をしたことは、十分考えられる。

しかしまた、池田昌意の「数学乗除往来」にこの分数 $\frac{355}{113}$ が書かれているのを見て、その考察をしたのかもしれない。しかし、關孝和より池田昌意のほうが、より多くの情報をもっていた、とは考え難い。やはり、1660 年よりそう遅くなく、これが得られたものと見てよいであろう。

さらに、上記の弧矢弦率の計算で、折角計算した正確な弧の長さでなく、わざわざ $\times\frac{355}{113}$ として使っているのである。關は、π の値は長々しいので、$\frac{355}{113}$ を使うと書いているのであるが、どうせ弧の長さを計算すれば、長々しい数になるので、それはあまり理由にはならない。

ともかく、この分数 $\frac{355}{113}$ の研究は、弧矢弦率の計算法を作った以前の作であることは間違いないであろう。

〔4〕 玉法 ここで一つ不思議に思われることがある。これは、球の体積の式 $\frac{1}{6}\pi r^3$ を導いているのであるが、そのために球の半分をスライスして、半径に沿って 25 等分、50 等分、100 等分して、その断面を錐体として体積を計算し、その和を取っている。そして、その計算をコツコツと丁寧にやっている。ところがそれは、自然数の 2 乗の和の公式を適用すれば、そんな計算をする必要のないことである。つまり、この計算をした時には、關は、まだ 2 乗の和の公式を知らなかったということになる。

關は、朶積術として、自然数の累乗和の公式を与えているのであるが、それは何時のことだろうか。

また、括要算法巻元には、この朶積術の前に、朶積総術並演段というのがあり、これは、補間多項式の計算である。しかし、それはいささか幼稚なもので、弧矢弦率の計算のときに見せたような緻密なものではない。また、それは、元の時代の授時暦の計算と似た趣がある。恐らくそれは、授時暦の研究中に作ったものであろう。

そうすれば、朶積術は、何時作られたものであろうか。それに対する手がかりは、見いだせないでいる。